Αριθμητική Ανάλυση   No. 1   Date 08/01/2020

Άσκηση

Να προσδιοριστούν οι παράμετροι a_1, x_0 και x_1 ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx a\left(f(x_0)+f(x_1)\right)$$

να 'ναι όσο το δυνατό πιο ακριβής.

Για πολυώνυμα μέχρι ποιου βαθμού είναι ακριβής;

Λύση

$$f(x)=1 : I(f) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2$$

$$Q(f) = a(1+1) = 2a \quad , \quad 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$f(x) = x \quad : \quad I(f) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$$Q(f) = x_0 + x_1 \quad , \quad x_0 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_0$$

$$f(x) = x^2 : I(f) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$Q(f) = x_0^2 + x_1^2 = 2x_0^2 \quad , \quad 2x_0^2 = \frac{2}{3} \quad , \quad x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad x_1 = -x_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad \text{αν} \quad x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$f(x) = x^3 \quad , \quad I(f) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

$$Q(f) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = 0$$

$$f(x) = x^4 : I(f) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$Q(f) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}$$

$$Q(f) \neq I(f)$$

Άρα είναι πολυώνυμα μέχρι 3ου βαθμού

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Άσκηση

Η ίδια έκφραση με τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq a(f(-1)+f(1)) + b(f(-1)-f(1))$$

Λύση

$f(x)=1$: $I(f) = \int_{-1}^{1} 1dx = [x]_{-1}^{1} = 2$

$Q(f) = a(1+1) + b(0-0) = 2a$, $a=1$

$f(x)=x$: $I(f) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$

$Q(f) = -1+1+b(1-1) = 0$

$f(x)=x^2$: $I(f) = \int_{-1}^{1} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$Q(f) = (-1)^2 + 1^2 + b(2(-1)-2\cdot 1) = -4b+2$

$-4b+2 = \frac{2}{3} \iff b = \frac{1}{3}$

$f(x)=x^3$ $I(f) = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$

$Q(f) = (-1)^3 + 1^3 + \frac{1}{3}(3(-1)^2 + 3\cdot 1^2) = 0$

$f(x)=x^4$: $I(f) = \int_{-1}^{1} x^4dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$Q(f) = (-1)^4 + 1^4 + \frac{1}{3}(4(-1)^2 - 4\cdot 1^2) = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$

$Q(f) \neq I(f)$

Ακριβής για πολυώνυμα μέχρι 3ου βαθμού

+ Είναι γνωστό ότι $\pi = \int_{0}^{1} \frac{4}{1+x^2} dx$ και

$$\pi = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Scanned with CamScanner

Να γίνει η εκτίμηση του σφάλματος των σύνθετων τύπων τραπεζίου και Simpson και η προσέγγιση του n ώστε στην κάθε περίπτωση (αν είναι δυνατόν), ώστε να βρεθεί ο π με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων για σύνθετους τύπους τραπεζίου και Simpson

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2} = 4(1+x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = -8(1+x^2)^{-2}x$$

$$f''(x) = 8(1+x^2)^{-3}(3x^2-1)$$

$$f^{(3)}(x) = -96(1+x^2)^{-4}(x^3-x)$$

$$f^{(4)}(x) = 96(1+x^2)^{-5}(5x^4-10x^2+1)$$

$$f^{(5)}(x) = -960(1+x^2)^{-6}(3x^5-10x^3+3x)$$

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 \cdot f^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}f^{(2)}(\xi)$$

$$f^{(3)}(x) = 0 \Leftrightarrow -96(1+x^2)^{-4}(x^3-x) = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

δεκτές ρίζες $x=0$, $x=1$.

$$\left.\begin{aligned} f^{(2)}(0) &= 8(1+0^2)^{-3}(3\cdot 0^2-1) = -8 \\ f^{(2)}(1) &= 8(1+1)^{-3}(3\cdot 1-1) = \frac{16}{2^3} = 2 \end{aligned}\right\} \max_{0\le x\le 1}|f^{(2)}(x)| = 8$$

$$R^T_{n+1}(f) \le \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)| = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 \ge \frac{2}{3}\cdot 10^{-6} \Leftrightarrow n \ge \sqrt{\frac{4}{3}}\cdot 10^{-6} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 10^{-6} \simeq 1.154,7$$

Άρα για να εξασφαλιστεί ακρίβεια: $n = 1155$.

Scanned with CamScanner

$R_{n+1}^{S} = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{h^4} f^{(4)}(\xi)$

$f^{(5)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^5 - 10x^3 + 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1/3 \\ x^2 = 3 \end{cases}$

δεκτές ρίζες $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$|f^{(4)}(0) = 96|$, $\left|f^{(4)}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| < |f^{(4)}(0)|$

$R_{n+1}^{S} = -\frac{1}{180} \cdot \frac{1}{h^2} 96 = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{h^4}$

$\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{n^4} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \Rightarrow n^4 \geq \frac{16}{15} \cdot 10^6 = \frac{2}{\sqrt[4]{15}} \cdot \sqrt{10^3} = 32.137$

$n = 33$, $n = 2^4 = 16$

$f(x) = 2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x^2)^2$

$f'(x) = -2(1-x^2)^{-1/2} x$

$f''(x) = -2(1-x^2)^{-3/2}$ $\lim_{x \to 1^-} f''(x) = -\infty$

$f^{(3)}(x) = \ldots$

$f^{(4)} = -6(1-x^2)^{-3/2} x$ $\lim_{x \to 1^-} f^{(4)}(x) = -\infty$

$f^{(5)} = \ldots$ μη φραγμένες

δεν είναι αναλυτική η εκτίμηση του σφάλματος

↓ 8 ψηφία

τραπεζίου $n = 2^{16} = 65536$

Simpson $n = 2^{15} = 32768$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner